3 ЛЕКЦИЯ

Еркін материалдық нүктенің және материалдық бөлшектер жүйесінің Лагранж функциясы. Ең аз әсер принципі немесе Гамильтон принципінен Лагранж теңдеулерін алу

1788 жылы француз математигі Лагранж (La Grange) және 1834 жылы ирланд математигі Гамильтон механиканың принциптерін энергияның сақталу заңдары арқылы көрсетті.

Лагранж теңдеулерін қорытамыз. Ол үшін қандай да бір координата – q_i және жылдамдық – $\dot{q}_i$ арқылы сипатталатын функцияны қарастырамыз.

Сонымен, $L(q_i, \dot{q}_i)$ – Лагранж функциясы немесе *кинетикалық потенциал* деп аталады. Лагранж функциясы кинетикалық энергия $\left(T = \dfrac{mv^2}{2}\right)$ және потенциялық энергия (U) айырмасына тең:

$$L = \frac{mv^2}{2} - U = T - U \,. \tag{1}$$

Еркін материалдық нүктенің Лагранж функциясы

$$L = \frac{mv^2}{2} \,. \tag{2}$$

Мұндағы m – материалдық нүктенің *массасы* деп аталады. Лагранж функциясының аддитивті қасиеті бойынша, бір-бірімен әсерлеспейтін материалдық нүктелер үшін:

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} \,. \tag{3}$$

Енді *тұйық жүйеде*, яғни тек бір-бірімен ғана әсерлесетін нүктелер жиыны үшін Лагранж функциясын жазып көрелік. Материалдық нүктелердің бір-бірімен әсерлесуі жоғарыдағы (3) өрнекке U функциясын қосып жазамыз

$$L = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2} - U(r_1, r_2, \ldots) . \tag{4}$$

Мұндағы $\vec{r}_a$ – a материалдық нүктесінің радиус векторы. Сонымен (4) тұйық жүйенің Лагранж функциясының жалпы түрі болып табылады. Мына қосынды

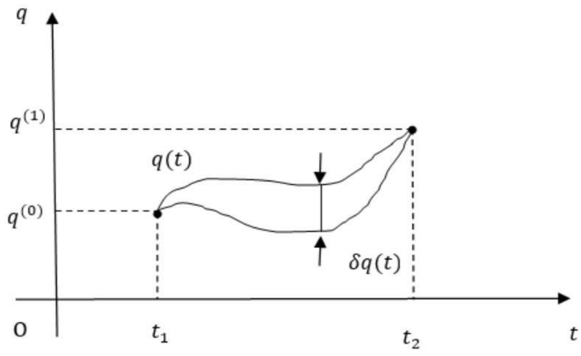
$$T = \sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}, \tag{5}$$

кинетикалық энергия, ал, U *– потенциалдық энергия* деп аталады.

Мынадай есепті қарастырайық. Лагранж функциясынан уақыт бойынша алынған анықталған интегралын S – деп белгілейміз және оны «әсер» деп атаймыз:

$$S = \int_{t_o}^{t} L dt. \tag{6}$$

Мақсатымыз $t - t_o$ – интегралдау шектері аралығындағы S -ның минимумын табу, яғни әсер фукциясының мәні ең аз болатындай қозғалыс түрін келтіру. S – функциясын зерттеу осы функцияның қозғалыс теңдеуін жазуға келтіреді.



Сурет 11.

Эйлер осы есепті шешу барысында, функционалдарды қолдану арқылы, математикадағы жаңа әдіс – вариациялау әдісін тапты. Вариациялық есептеулердегі вариациялау дифференциалдау тәрізді "δ" грек әрпімен белгіленеді. Мысалы, Ф функциясының x және y айнымалылары бойынша толық дифференциалы:

$$d\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y} dy \tag{7}$$

болса, вариациялау:

$$\delta\Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \delta x + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \delta y \tag{8}$$

болады. Вариациялау да дифференциалдау сияқты коммутативті (кез келген тәртіп бойынша бірінен соң бірі жазыла береді):

$$d(\delta\Phi) = \delta(d\Phi) \text{ және } \delta(x^n) = nx^{n-1}\delta x. \tag{9}$$

Енді W– функциясының экстремумын табуға көшейік. Лагранж функциясы кинетикалық және потенциалдық энергияларының айырмасы болғандықтан, бұл функция жылдамдық пен координатаның функциясы болады. Бұл координаталар: тікбұрышты, сфералық, цилиндрлік, параболалық және т.б. болуы мүмкін. Сондықтан жалпылама координата – q_i мен жалпылама жылдамдық – $\dot{q}_i$ пайдаланамыз. Мысалы, тік бұрышты координаттар жүйесі үшін:

$$\begin{array}{lll} q_1 = x, & & \dot{q}_1 = v_x, \\ q_2 = y, & \text{және} & \dot{q}_2 = v_y, \\ q_3 = z, & & \dot{q}_3 = v_z. \end{array} \tag{10}$$

Жалпылама координаттарда жазылған Лагранж функциясы:

$$L = L(q_i, \dot{q}_i) = L(q_1, q_2, \ldots q_i, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots \dot{q}_i) \tag{11}$$

және Лагранж функциясы уақытқа тәуелді болуы мүмкін. (9) –ті (6)-ге қойып және вариациялап:

$$\delta S = \delta \int_{t_0}^{t} L dt = \int_{t_0}^{t} \delta L dt \tag{12}$$

δL вариациясын табамыз:

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right), \tag{13}$$

(13) –ні (12)-ге қойып:

$$\delta S = \int_{t_0}^{t} \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i \right) dt. \tag{14}$$

Екінші мүшені жеке қарастыратын болсақ:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i dt = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\imath} \left(\delta \frac{dq_i}{dt} \right) dt \tag{15}$$

дифференциалдау мен вариациялау коммутативті болғандықтан, оларды қолдану тәртібі ауысып келе береді:

$$\delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_i . \tag{16}$$

Одан ары:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\left(\delta \frac{dq_i}{dt}\right)dt = \int_{t_0}^{t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)dt \,. \tag{17}$$

(17) бөліктеп интегралдау әдісін қолдана отырып:

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\frac{d}{dt}(\delta q_i)\,dt = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_0}^{t} - \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\,dt =$$

$$= \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\Big|_{t_0}^{t} = \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_t - \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i\right]_{t_0} = 0 \right| =$$

$$= -\int \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta q_i dt. \tag{18}$$

Вариациялау шарты бойынша бастапқы және соңғы нүктелер бекітілген (Сурет 11), яғни $\delta q(t_0) = \delta q(t) = 0$. Орнына қоямыз:

$$\delta S = \sum_{i=1}^{n} \int_{t_0}^{t} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)\delta q_i dt = 0, \tag{19}$$

Осы жерде көріп тұрғанымыздай, δq_i вариациясы кез келген мәнге ие бола алады. Жақшаның ішіндегі мән оның коэффициенті болып табылады. Осы коэффициент нөлге тең болса ғана $\delta S = 0$ шарты орындалады. Сондықтан (19) орындалса, Лагранж функциясы үшін n дифференциалдық теңдеу бар болады:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1,2,...n \tag{20}$$

Осы теңдеулер *Лагранж теңдеулері* деп аталады және теориялық механиканың негізі болып табылады. Ол координаталары мен жылдамдықтары арқылы анықталған жүйенің қозғалысын потенциалдық энергия мен кинетикалық энергия тұрғысынан сипаттайтын дифференциалдық теңдеулер жиынтығы болып табылады.

Қорыта айтатын болсақ: Лагранж теңдеулері жүйенің қозғалысын табуға арналған есебін функционалдық әрекеттің экстремумын табуға дейін қысқартуға мүмкіндік береді, ол Лагранждың уақыт бойынша интегралы (кинетикалық және потенциалдық энергиялардың айырмасы) және жүйенің бастапқы және соңғы шарттары арасындағы айырмашылық ретінде анықталады; Лагранж теңдеулері көптеген денелер үшін Ньютон заңының тұжырымдамасы болып табылады және денелерге әсер ететін нақты күштерді білмей-ақ жүйенің траекториясын есептеуге мүмкіндік береді; Лагранж теңдеулері сипаты жағынан симметриялы және координаталар жүйесін таңдауға тәуелді емес болып табылады. Бұл өз кезегінде механика есептерін шешуді жеңілдетуге және оларды әмбебап етуге мүмкіндік береді; Лагранж теңдеулерін тепе-теңдік конфигурацияларын анықтауға арналған есептерді шешуге мүмкіндік беретін жүйенің потенциалдық энергиясының стационарлық нүктелерін іздеу үшін де қолдануға болады; Лагранж теңдеулері кванттық механикада да маңызды рөл атқарады, себебі, бұл теңдеулер ең аз әрекет принципін тұжырымдауға негіз болады.

Өзін-өзі бақылауға арналған тапсырмалар мен сұрақтар

1. Еркін бөлшектің Лагранж функциясы дегеніміз не және оның материалдық нүктенің кинетикалық энергиясымен қандай байланысы бар?

2. Материалдық бөлшектер жүйесінің Лагранж функциясы қалай жазылады және ол жүйенің кинетикалық энергиясымен және потенциалдық энергиясымен қалай байланысты?

3. Ең аз әсер ету принципі немесе Гамильтон принципі дегеніміз не және ол жүйенің қозғалыс теңдеулерін алу үшін қалай қолданылады?

4. Материалдық нүктелер жүйесі үшін Лагранж теңдеулері қалай жазылады және олар жүйенің Лагранж функциясымен қалай байланысты?

5. Теориялық механикада ең аз әсер ету принципі қандай және оның ең аз әсер ету эффектісінен айырмашылығы неде?

6. Жүйенің қозғалыс теңдеулерін табу үшін ең аз әсер ету принципі қалай қолданылады және олардың Лагранж теңдеулерімен байланысы қандай?

7. Лагранж теңдеулерін жүйенің қозғалысын талдау және оның энергиясы және басқа қасиеттері туралы ақпарат алу үшін қалай пайдалануға болады?

8. Әрекет дегеніміз не және оның ең аз әсер ету принципімен және ең аз әсер ету принципімен қандай байланысы бар?

9. Лагранж әдісінің теориялық механика есептерін шешудің басқа әдістерімен салыстырғандағы артықшылықтары мен шектеулері қандай?

10. Лагранж механикасы Гамильтон механикасымен қалай байланысты және бұл теориялардың әрқайсысының жүйе қозғалысын талдау үшін қандай артықшылықтары бар?

Қолданылған әдебиет

1. N. Beissen, H. Quevedo. Lecture Course on Theoretical Mechanics. – Учебное пособие на английском языке под грифом УМО РУМС и МОН РК для студентов университетов по специальностям «Физика» и «Ядерная физика». Алматы, Қазақ университеті, 2017. 9,75 п.л.

2. М.Е. Абишев, Н.Ә. Бейсен. – Теориялық физиканың таңдаулы тараулары: оқу құралы. Алматы: Қазақ университеті, 2018 – 228 б.

3. Теориялық механика: оқулық / Н.Ә. Бейсен. – Алматы: Қазақ университеті, 2023. – 18,5 б.т. ISBN 978-601-04-6387-5